Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Computo
(ESCOM)

ACERCA DEL CONTINUO DIMENSIONAL
Un Universo Fractal

Fernando Galindo Soria
Tel. 57296000 x 52027
fgalindo@vmredipn.ipn.mx

Cd. de México, 22 de Noviembre de 1998

ESPACIO CONTINUO DIMENSIONAL,

Es un espacio en el cual se tienen tantas dimensiones como números reales,

es decir es un espacio donde no se tienen 1,2,..o n dimensiones sino un numero transfinito de dimensiones

se puede ver como un continuo de dimensiones en forma parecida a como una recta se ve como un continuo de puntos.

A mediados de los 70´s el investigador de la IBM, Benoit B. Mandelbrot estudio un tipo de objetos
que tienen la característica de que sus partes se parecen al todo
y los englobo con el nombre genérico de *fractales*,

si se toma una piedra y se estrella contra el suelo cada uno de los fragmentos resultantes se pueden ver como piedras, si se toma una rama de un árbol y se siembra aparentemente lo que se obtiene es un árbol, en fin si se toma un fragmento de muchos otros objetos de la naturaleza como los ríos, rayos, montañas, etc., se obtiene algo parecido al objeto completo.

En general se considera que los fractales tienen *dos características fundamentales*:

la *autosimilaridad*
que es precisamente la propiedad de que un fragmento sea parecido al todo

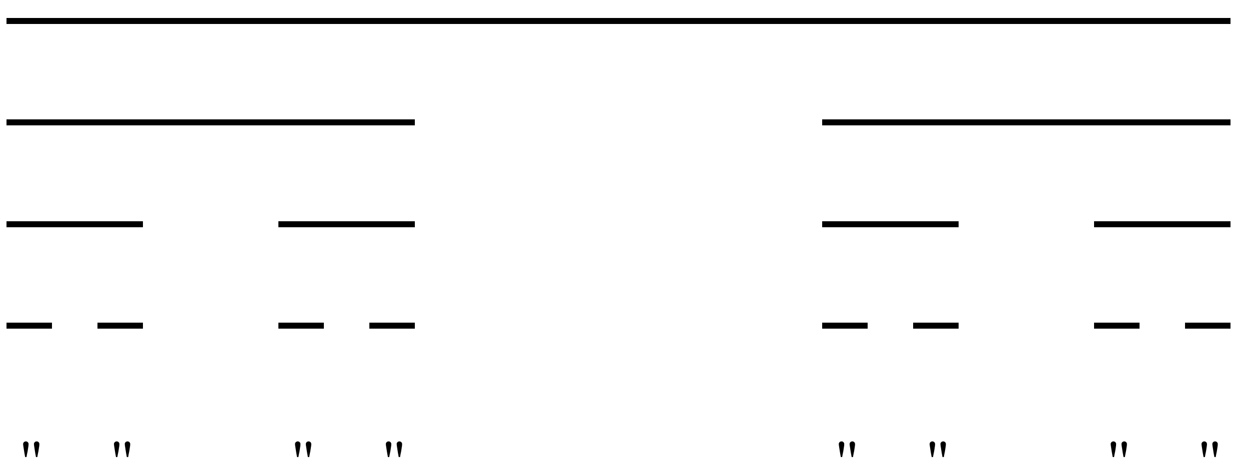
la *dimensión fractal*,
esta segunda característica surge porque al calcular la dimensión de los objetos fractales normalmente no resulta un numero entero, con lo cual y de golpe nos cambia radicalmente nuestra concepción de la realidad, ya que, normalmente estamos acostumbrados a pensar en objetos de 1, 2, 3 o mas dimensiones, pero siempre dimensiones enteras, por lo que es difícil conceptualizar objetos con dimensiones *fraccionarias*, como por ejemplo 1.66 ó 2.87.

cada vez se han encontrado más fenómenos en los cuales las ecuaciones o modelos toman en cuenta la dimensión fractal del problema,
en Física se encontró que la ecuación que describe la relación entre la forma de un objeto y el sonido que emite al ser tocado depende de la dimensión fractal del objeto, ya que, cuando se utilizaban las dimensiones enteras aproximadas los resultados no eran aceptables.

Es decir que se han encontrado fenómenos dentro de la Física cuyo comportamiento depende de la dimensión fractal y estos fenómenos se describen asumiendo que existen dimensiones fraccionarias y por tal motivo que se desarrollan en un espacio que se describe en termino de dimensiones no enteras

Polvos de Cantor

Se construyen tomando una recta, dividiéndola en tres partes iguales, quitándole la parte central y aplicándole a cada una de las rectas resultantes nuevamente el algoritmo,



Los polvos de Cantor en el limite están formados por un numero enorme de segmentos de recta a los que se les ha quitado la tercera parte pero que no llegan a ser puntos.

Estos y otros problemas en los cuales no es fácil decidir si el fractal tiene dimensión 1 o 2, 2 o 3, ó 1 o 3 ha obligado a los investigadores ha buscar métodos para encontrar la *dimensión fractal*.

En general se considera que la ***dimensión fractal*** mide que tanto ocupan los objeto el espacio, o que tan densos o tenues son,

por ejemplo si se tiene un objeto dentro de una esfera la dimensión fractal de este objeto indica una relación entre el espacio de la esfera y el espacio ocupado por el objeto,
por ejemplo si los objetos son árboles, en un extremo se puede tener una rama que ocupa muy poco volumen de la esfera y que tiene dimensión cercana a 1,
en el otro extremo se puede tener un árbol muy denso, que ocupa prácticamente toda la esfera y que tiene dimensión tres

y en medio se tienen todos los demás arboles que ni son esféricos ni lineales y que tiene una dimensión intermedia entre uno y tres.

Otro ejemplo donde se visualiza directamente como la dimensión de un objeto puede variar de un momento a otro me fue proporcionado por
Antonio Jimenez Aviña

consiste en tomar un liquido (como agua o café), cuando el liquido se encuentra en una taza ocupa un volumen y su dimensión es de 3,
ahora bien, si tomamos el liquido y lo derramamos sobre una superficie el espacio que ocupa es mas planar que volumétrico y su dimensión es cercana a 2,

o sea que el mismo liquido en un momento ocupa un espacio de 3 dimensiones y en el otro uno cercano a 2

existe una gran cantidad de fenómenos y ecuaciones que tienen como parámetro la dimensión de lo que modelan.

el espacio que ocupan una linea circulo o esfera se puede ver caracterizado respectivamente por su
longitud L, área A y volumen V,
si suponemos que los tres objetos tienen el mismo radio r entonces las ecuaciones que representan al espacio ocupado son

Objeto	Dimensión	Ecuación
Linea	1	$L = 2\, r^1$
Circulo	2	$A = \pi\, r^2$
Esfera	3	$V = 4/3\, \pi\, r^3$

o sea que el espacio ocupado por una linea, circulo o esfera se puede encontrar en general como una función de la dimensión del objeto.

existen propiedades de la naturaleza (como el espacio ocupado) que se pueden calcular mediante una ecuación en la cual uno de los parámetros es la dimensión de los objetos involucrados, ahora bien si se empiezan a observar distintas áreas de estudio, se empieza a encontrar que la dimensión de los objetos es una propiedad presente en múltiples fenómenos de la naturaleza ,
como por ejemplo en las ecuaciones que relacionan la forma de un objeto y el sonido que emite,
sin embargo por su misma cotidianidad resulta transparente y en su momento no

nos preocupamos ni de calcularla ni de usarla correctamente.

Comúnmente cuando necesitamos usar la dimensión de un objeto dentro de una ecuación la asignamos por observación (o es lineal, planar o volumétrica),

con lo cual se puede llegar a asignar una dimensión errónea a los objetos, como es el caso de los aerogeles o sea geles (como los flanes, gelatinas, etc.) a los cuales se les han sustituido los líquidos por aire, pero se ha mantenido su estructura, donde si los ve uno en principio son objetos en tres dimensiones, pero sin embargo sus propiedades físicas indican que en algunos casos pueden tener un comportamiento mas cercano al de un objeto en una o dos dimensiones.

MÉTODOS PARA ENCONTRAR LA DIMENSIÓN FRACTAL

Existen ecuaciones donde la dimensión es un parámetro
Este se puede despejar
con lo que se tiene una forma general para encontrar la dimensión de un objeto.

Cualquier ecuación donde aparezca la dimensión como parámetro se podría ver como un candidato para encontrar la dimensión del objeto, Los métodos mas usados toman el objeto y lo engloban dentro de algún cuerpo geométrico como una hiperesfera o un hipercubo y aplican fórmulas que relacionan la cantidad total de elementos que caben en el cuerpo geométrico y la cantidad de elementos que componen al objeto.

Encontrar la cantidad de elementos que ocupan completamente un cuerpo geométrico es normalmente fácil ya que existen ecuaciones directas para encontrarlos calcular el numero de elementos que componen un objeto fractal es mas complicado

Métodos para calcular el numero de elementos que componen un objeto fractal

contar elemento por elemento,

encontrar alguna ecuación que indique como crece el objeto fractal,

en el caso de los objetos que se generan por agregación, generar una gran cantidad de fractales y para cada fractal se mide cuantos objetos se agregaron y cual es el radio de la esfera que lo engloba y luego se encuentra para cada agregado su dimensión y se calcula la dimensión promedio de todos los agregados con lo que se obtiene una buena aproximación a la dimensión real.

Desde finales del siglo XIX y principios del XX se contaba con métodos para encontrar dimensiones fraccionarias, aunque hasta el descubrimiento de los fractales se veían como meras curiosidades

Método de Hausdorff

a. Dado un objeto fractal se le engloba completamente en una esfera (o hiperesfera) de radio **r.**

b. Se cuenta el numero de unidades elementales ***N*** *que forman el objeto fractal.*

c. Como en un espacio euclidiano en general se tiene que **$N = c\, r^d$**

y nuestro problema es encontrar **d**

despejando queda:

$$N/c = r^d$$

$$\ln(N/c) = \ln(r^d)$$

$$\ln(N/c) = d*\ln(r)$$

$$\mathbf{d} = \ln (N / c) / \ln (r)$$

o sea que para encontrar la dimensión fractal de un objeto se divide ln de N por una constante entre ln de r.

.

Método de Minkowski o de Cajas

Si se toma un objeto
(linea, superficie, solido)
y se recubre con pequeñas cajas de tamaño **t**,
el numero de cajas necesarias para cubrir completamente el objeto sin que se superpongan cajas depende de la dimensión del objeto

Objeto	# de objetos elementales necesarios para recubrir el objeto
linea de tamaño 10**t**	10^1 lineas de tamaño **t**
cuadro de lado 10**t**	10^2 = 100 cuadros de tamaño $\mathbf{t}^2$

cubo de lado 10**t**	10^3 = 1000 cubos de tamaño $\mathbf{t}^3$
hipercubo de dimensión **d** de lado 10**t**	$10^{\mathbf{d}}$ hipercubos de tamaño $\mathbf{t}^{\mathbf{d}}$

•

Para tener un recubrimiento real es necesario que **t** sea cada vez menor y conforme el tamaño **t** disminuye el numero de cajas necesarias **N** aumenta dependiendo de la dimensión **d** aunque el tamaño del objeto sea constante.

dimensión **d** / tamaño **t**	1	2	3
1	1	1	1
1/10	10	100	1000
1/100	100	10000	1000000

En general $\mathbf{N} = (1/\,\mathbf{t})^{\mathbf{d}}$

el numero **N** de cajas de tamaño **t** necesarias para cubrir un objeto depende de su dimensión

si se despeja **d** queda que:

d= ln (N)/ ln (1/t).

.

Entonces para encontrar la dimensión fractal **d** de un objeto mediante el **Método de Minkowski o de Cajas**

lo que se hace es

recubrir el objeto totalmente de cajas de tamaño **t**,
contar cuantas cajas se necesitaron **N**,

encontrar los logaritmos

y calcular

d= ln (N)/ ln (1/t).

•

dimensión fractal
de los polvos de Cantor

en cada uno de las iteraciones que se realizaron para obtener los polvos los fragmentos miden 1/3 de los fragmentos de la iteración previa

Numero de cajas **N**	tamaño de las cajas **t**
1	1
2	1/3
4	1/9
8	1/27
"	"
2^n	$1/3^n$

El numero de cajas crece en potencias de 2 y su tamaño cambia como potencias de 1/3, de donde la dimensión fractal del objeto es

$$\mathbf{d} = \ln(2^n) / \ln(\ 1/1/3^n\ ) = \ln(2^n) / \ln(\ 3^n\ ) = \ln(\ 2\ ) / \ln(\ 3\ ) = \mathbf{0.6309...}$$

.

Existen fórmulas matemáticas y modelos (principalmente de Biología y Física) donde en forma cotidiana se ha utilizado la dimensión de los objetos de estudio, aunque generalmente se han usado únicamente dimensiones enteras

(tal vez pocas personas lo han notado ya que estamos acostumbrados a manejar las dimensiones 1, 2, 3, ..., n y simplemente por observación asumimos la dimensión del objeto de estudio),

desde que se descubrieron los fractales se detecto que la explicación de un fenómeno dado era mejor conforme la

dimensión se acercaba a la dimensión fractal real.
si en las diferentes fórmulas y modelos que dependen de la dimensión de un objeto se utiliza su dimensión fractal, el modelo puede explicar mejor el fenómeno estudiado.

EL CONTINUO DIMENSIONAL

no nos cuesta trabajo visualizar espacio de 1, 2 o 3 dimensiones,

y aun mas aceptamos que si un objeto se representa con n dimensiones entonces se puede "ver" como un punto en un espacio n-dimensional,

Ahora bien, desde el surgimiento de los fractales tenemos que aceptar que existen dimensiones fraccionarias como por ejemplo 1.37, o sea que, ya no solo existen espacios con dimensiones 1,2,..., n sino también espacios con dimensiones como 2.38, 1.47, 325, etc.,

aun mas podemos postular que existen objeto que tiene dimensiones reales. Para cada x ε (0,1) podemos generar un fractal de dimensión x, como se puede ver si tomamos la siguiente generalización de los polvos de Cantor propuesta por Gamma Z. Galindo Perez, *sobre la posibilidad de tener polvos de Cantor de diferentes dimensiones*

a. Tomamos una recta de tamaño T y le quitamos un segmento proporcional **q** del centro.
(por ejemplo la tercera parte, la mitad, 2/3 o cualquier otro valor entre (0,1))

b. Tomamos cada uno de los segmentos resultantes y les quitamos nuevamente del centro el segmento proporcional **q**.

c. Seguimos repitiendo lo anterior, quedando finalmente una secuencia de polvos de Cantor como la siguiente:

1

$(1-\mathbf{q}) / 2$ $\qquad$ $\mathbf{q}$ $\qquad$ $(1-\mathbf{q}) / 2$

$\frac{(1-q)(1-q)}{2^2}$ $\frac{q(1-q)}{2}$ $\frac{(1-q)(1-q)}{2^2}$ $\qquad$ $\mathbf{q}$ $\qquad$ $\frac{(1-q)(1-q)}{2^2}$ $\frac{q(1-q)}{2}$ $\frac{(1-q)(1-q)}{2^2}$

$(1-q)^2 / 2^2$ $\quad$ $(1-q)^2 / 2^2$ $\qquad$ $(1-q)^2 / 2^2$ $\quad$ $(1-q)^2 / 2^2$

$\frac{(1-q)^3}{2^3}$ $\frac{(1-q)^3}{2^3}$ $\frac{(1-q)^3}{2^3}$ $\frac{(1-q)^3}{2^3}$ $\qquad$ $\frac{(1-q)^3}{2^3}$ $\frac{(1-q)^3}{2^3}$ $\frac{(1-q)^3}{2^3}$ $\frac{(1-q)^3}{2^3}$

" " " " " " " "

Si medimos el tamaño de un segmento y suponemos que T = 1 tenemos que:

en la primera iteración el segmento vale
1

en la segunda vale	$(1-\mathbf{q})/2$
en la tercera vale	$(1-\mathbf{q})^2/2^2$
en la cuarta vale	$(1-\mathbf{q})^3/2^3$
""""""	""""""
y en la enésima vale	$(1-\mathbf{q})^n/2^n$

Entonces si calculamos la dimensión fractal **d** de los polvos de Cantor propuestos por Gamma Z. Galindo Perez, mediante el Método de Minkowski

se tiene que calcular

$$\mathbf{d} = \ln(\mathbf{N}) / \ln(1/\mathbf{t}).$$

donde

$$\mathbf{N} = 2^n$$

$$\mathbf{t} = (1-\mathbf{q})^n / 2^n$$

o sea que

$$\mathbf{d}= \ln(2^n) / \ln(1/((1-\mathbf{q})^n/2^n))$$

$$\mathbf{d}= \ln(2^n) / \ln(2^n / (1-\mathbf{q})^n)$$

$$\mathbf{d}= \ln(2) / \ln(2/(1-\mathbf{q}))$$

*la dimensión de los polvo de Cantor depende de **q***

despejando **q** de la ecuación

$$\mathbf{d}= \ln(2) / \ln(2 / (1-\mathbf{q}))$$

queda

$$\mathbf{q} = 1-2^{1-1/\mathbf{d}}$$

entonces para cualquier dimensión candidata **d** ε (0,1) podemos encontrar un **q** que genera polvos de Cantor de dimensión **d** *con lo que mostramos que para cualquier valor* **d** *entre (0,1) existe un objeto que tiene esa dimensión*

Y como el intervalo (0,1) tiene un numero continuo de valores entonces existe un continuo de dimensiones

o sea que, podemos postular que existen *espacios en los cuales se tienen dimensiones reales,*

y *que existen tantas dimensiones como números reales, o sea que el universo esta caracterizado por un numero transfinito de dimensiones.*

Aun mas, postulamos que vivimos en un *continuo dimensional*, o sea que no tenemos un universo de 3, 4,... n dimensiones, sino *un universo en el cual se tiene un numero transfinito de dimensiones* y lo mismo podemos tener objetos de dimensión 1, 2, 3,..., n dimensiones o de dimensión 3/4, 2/3, 8/3, π o x dimensión donde x es un numero real.

A este espacio lo llamamos *EL ESPACIO CONTINUO DIMENSIONAL*

Esta concepción del continuo dimensional tiene sus antecedentes en el desarrollo de la recta numérica, en el cual primero se manejan los números naturales, luego los enteros, luego los racionales y posteriormente los reales, con lo que se tiene una recta continua;

exactamente lo mismo se plantea para el caso de nuestra concepción del universo, ya que originalmente se manejan problemas en una dimensión, dos dimensiones,..., n dimensiones y mas adelante en dimensiones fraccionarias racionales y en dimensiones reales.

Esta idea nos permite cuestionar y replantear todos aquellos modelos en los que interviene como un parámetro la dimensión de algún objeto,
por lo que en general sentimos que es necesario revisar nuestro modelo físico de la realidad, ya que esta basado en una concepción del universo formado por un numero natural de dimensiones

(aunque tal vez infinito pero no fractal o continuo dimensional)

y finalmente permite plantear la pregunta crucial

¿ que teoría del universo se puede desarrollar partiendo del concepto de Continuo Dimensional?,

tal vez,

el modelo fisico-biologico-informatico del universo esta por descubrirse.

FUENTES DE INFORMACIÓN.

1. Jean-Pierre **Fabre**, *¿Se puede oír la forma de un tambor?*, en Mundo Científico vol. 8, num. 85, pag. 1047, Ed. Fontalba, S.A., Barcelona, España.
2. James **E. Mcnamee**, *Los fractales en los vasos pulmonares,* en Mundo Científico vol. 12, num. 122, pag. 248, Ed. Fontalba, S.A., Barcelona, España.
3. Edmundo **Flores**, *La creación de la nueva ciencia del caos y el ocaso de la Meteorología y de la Econometrìa*. en El Búho tomo IV, num. 26687, domingo 15 de Julio de 1990.
4. Rémi **Jullien**, Robert **Botet** y Max **Kolb**, *Los Agregados*, en Mundo Científico vol. 6, num. 54, pag. 36, Ed. Fontalba, S.A., Barcelona, España.
5. Robert **Botet,** Rémi **Jullien** y Arne **T. Skjeltorp**, *La forma, resultado del crecimientos*, en Mundo Científico vol. 7, num. 75, pag. 1244, Ed. Fontalba, S.A., Barcelona, España.
6. Leonard **M Sander**, *Crecimiento Fractal*, en Investigación y Ciencia, num. 126, pag. 66, marzo de 1987.
7. René **Vacher**, Eric **Courlens** y Jacques **Pelous**, *La estructura fractal de los aerogeles*, en Mundo Científico vol. 10, num. 103, pag. 652, Ed. Fontalba, S.A., Barcelona, España.

8. Donald **Hearn** y M. Pauline **Baker**, *Gráficas por Computadora 2.- Ed.*, Editorial Prentice Hall, 1995, México.
9. Michael **Barnsley**, *Fractals Everywhere*, Ed. Academic Press, Inc., 1988, Londres.
10. Fernando **Galindo Soria**, *El Continuo Dimensional: Un Universo Fractal,* Conferencia en el Congreso Nacional de Egresados de Física y Matemáticas, 1989, La Trinidad Tlaxcala.
11.Heinz-Otto **Peitgen** and Dietmar **Saupe** (Editores). *The Science of Fractal Images*. Ed. Springer-Verlag, 1988.
12. Fernando **Galindo Soria.** *Aplicaciones de la Lingüística Matemática y los Fractales a la Generación de Imágenes.* en Mem. Simposium Nac. de Computación. México, Nov. de 1991.
13. Fernando **Galindo Soria**, *Aplicación de la Lingüística Matemática a la Generación de Paisajes*, en Mem. del Simposium Internacional de Computación, IPN-CENAC, México 1996.
14. Gamma Z. **Galindo Perez,** *Comunicación personal sobre la posibilidad de tener polvos de Cantor de diferentes dimensiones,.* 5 de Agosto de 1998. Cd, de México.
15. Antonio **Jimenez Aviña**, *Comunicación personal,.* 6 de Agosto de 1998. Cd, de México.
16. Fernando **Galindo Soria.** *De Fractales y otros Bichos: La Matemática de la Naturaleza (Rumbo a la Matemática Informática),.* en Memorias del VI Congreso Nacional sobre Informática y Computación, Octubre de 1993, Mérida, Yucatán.
17. Monique **Dubois**, Pierre **Aften** y Pierre **Bergé**, *El Orden Caótico*, en Mundo Científico vol. 7, num. 68, pag. 429, Ed. Fontalba, S.A., Barcelona, España.
18. Martin **Gardner**, *White and brown music, fractal curves, and one-over-f noise*, en Scientific American, abril de 1978.