ACERCA DEL CONTINUO DIMENSIONAL: Un Universo Fractal

Fernando Galindo Soria
Escuela Superior de Computo (ESCOM)
Instituto Politécnico Nacional
Av. Miguel Othón de Mendizábal y Av. Juan de Dios Bátiz s/n
Zacatenco, Cd. de México
07738 MÉXICO
fgalindo@ipn.mx www.fgalindosoria.com

1. Versión Cd. de México, 1989
Actualizaciones: 22 de Noviembre de 1998, 18 de Septiembre de 1999, 31 de Agosto del 2000

Palabras Claves.
Continuo Dimensional, fractales, dimensión fractal, Matemática Informática, dinámica dimensional

RESUMEN

En este trabajo se presenta el espacio continuo dimensional, como un espacio en el cual se tienen tantas dimensiones como números reales, es decir es un espacio donde no se tienen 1,2,..o n dimensiones sino un numero transfinito de dimensiones y que se puede ver como un continuo de dimensiones en forma parecida a como una recta se ve como un continuo de puntos.

Como primer punto y con el fin de dar contexto a la idea se parte de los conceptos de fractal y de dimensión fractal y se muestran algunos ejemplos tomados de la Física, donde el concepto de dimensión fractal es fundamental, ya que se ha encontrado que existen objetos y fenómenos cuyo comportamiento depende de su dimensión fractal.

Mas adelante se ven algunas de las técnicas que se manejan para encontrar la dimensión fractal y se muestra que para cualquier numero real x ε [0,1) existe un objeto fractal que tiene dimensión x.

Finalmente se generaliza la idea y se plantea que el numero de dimensiones que existen son tantas como los numero reales y conforman el continuo dimensional.

INTRODUCCIÓN

Si se toma una piedra y se estrella contra el suelo cada uno de los fragmentos resultantes se pueden ver como piedras, si se toma una rama de un árbol y se siembra aparentemente lo que se obtiene es un árbol[4], en fin si se toma un fragmento de muchos otros objetos de la naturaleza como los ríos, rayos, montañas, etc., se obtiene algo parecido al objeto completo.

A mediados de los 70´s el investigador de la IBM, Benoit B. Mandelbrot estudio este tipo de objetos y los englobo con el nombre genérico de *fractales*[4][8][11][16], los fractales se introdujeron rápidamente en los medios informáticos, por ejemplo en la graficación y conforme ha pasado el tiempo se les ha encontró aplicaciones en otras áreas como el reconocimiento de formas y la modelación.

En general se considera que los fractales tienen *dos características fundamentales*: la *autosimilaridad* [1][4] que es precisamente la propiedad de que un fragmento sea parecido al todo y la *dimensión fractal*[1][4][6], esta segunda característica surge porque al calcular la dimensión de los objetos fractales normalmente no resulta un numero entero, con lo cual y de golpe nos cambia radicalmente nuestra concepción de la realidad, ya que, normalmente estamos acostumbrados a pensar en objetos de 1, 2, 3 o mas dimensiones, pero siempre dimensiones enteras, por lo que es difícil conceptualizar objetos con dimensiones *fraccionarias*, como por ejemplo 1.66 ó 2.87.

Sin embargo y conforme pasa el tiempo el concepto de Fractal ha sido cada vez más aceptado y cada vez se han encontrado más fenómenos en los cuales las ecuaciones o modelos toman en cuenta la dimensión fractal del problema, por ejemplo en Física se encontró que la ecuación que describe la relación entre la forma de un objeto y el sonido que emite al ser tocado depende de la dimensión fractal del objeto[1], ya que, cuando se utilizaban las dimensiones enteras aproximadas los resultados no eran aceptables.

Es decir que se han encontrado fenómenos dentro de la Física cuyo comportamiento depende de la dimensión fractal y estos fenómenos se describen asumiendo que existen dimensiones fraccionarias y por tal motivo que se desarrollan en un espacio que se describe en termino de dimensiones no enteras, lo que nos lleva a postular en este trabajo que el numero de dimensiones del espacio no es de tres, cuatro o cualesquier otro numero natural, sino que el espacio tiene *un numero continuo de dimensiones* y en su momento las ecuaciones o modelos que describen algún fenómeno tienen que tomar en cuenta este hecho.

1.- El Concepto de Dimensión Fractal

Cuando se empieza a trabajar con los fractales se encuentran ciertos fenómenos que aparentemente son contradictorios, como por ejemplo una curva descrita por Giuseppe Peano en 1890[8][11][18] que en el limite cubre completamente un plano ¿como una curva que no tiene área puede cubrir un plano?, u objetos que aparentemente crecen en dos dimensiones pero que sin embargo ocupan menos espacio que el plano como algunos tipos de agregados[4], o estructuras fractales que ocupan menos espacio que el que necesita una recta y que son aparentemente rectilíneos, como por ejemplo los polvos de Cantor[2][17] que se construyen tomando una recta, dividiéndola en tres partes iguales, quitándole la parte central y aplicándole a cada una de las rectas resultantes nuevamente el algoritmo, como se ve en el siguiente ejemplo

Los polvos de Cantor en el limite están formados por un numero enorme de segmentos de recta a los que se les ha quitado la tercera parte pero que no llegan a ser puntos. Estos y otros problemas en los cuales no es fácil decidir si el fractal tiene dimensión 1 o 2, 2 o 3, ó 1 o 3 ha obligado a los investigadores ha buscar métodos para encontrar la *dimensión fractal*.

En general se considera que la dimensión fractal mide que tanto ocupan los objeto el espacio, o que tan densos o tenues son, por ejemplo si se tiene un objeto dentro de una esfera la dimensión fractal de este objeto indica una relación entre el espacio de la esfera y el espacio ocupado por el objeto, por ejemplo si los objetos son árboles, en un extremo se puede tener una rama que ocupa muy poco volumen de la esfera y que tiene dimensión cercana a 1, en el otro extremo se puede tener un árbol muy denso, que ocupa prácticamente toda la esfera y que tiene dimensión tres y en medio se tienen todos los demás árboles que ni son esféricos ni lineales y que tiene una dimensión intermedia entre uno y tres.

Otro ejemplo donde se visualiza directamente como la dimensión de un objeto puede variar de un momento a otro me fue proporcionado por Antonio Jiménez Aviña[15] y consiste en tomar un liquido (como agua o café). Cuando el liquido se encuentra en una taza ocupa un volumen y su dimensión es de 3, ahora bien, si tomamos el liquido y lo derramamos sobre una superficie el espacio que ocupa es mas planar que volumétrico y su dimensión es cercana a 2, o sea que el mismo liquido en un momento ocupa un espacio de 3 dimensiones y en el otro uno de 2. Ahora bien, si en lugar del liquido tomamos una barra de plastilina, le damos forma esférica y a continuación la aplanamos hasta obtener una lamina, podemos lograr que la dimensión del espacio ocupado por la plastilina al momento de ser aplanada tome todos los valores reales entre 3 y 2, o sea que ese objeto en su dinámica transite por todas las dimensiones entre tres y dos.

Para entender el concepto de dimensión fractal es conveniente primero darnos cuenta que, existe una gran cantidad de fenómenos y ecuaciones que tienen como uno de sus parámetros la dimensión de lo que modelan. Por ejemplo si tomamos una línea, un circulo y una esfera nos damos cuenta que el espacio que ocupan se puede ver caracterizado respectivamente por su longitud L, área A y volumen V, de donde si suponemos que los tres objetos tienen el mismo radio r entonces las ecuaciones que representan al espacio ocupado son respectivamente

Objeto	Dimensión	Ecuación
Línea	1	$L = 2\,r$
Circulo	2	$A = \pi\, r^2$
Esfera	3	$V = 4/3\, \pi\, r^3$

Donde se observa que las ecuaciones que describen el espacio ocupado por cada objeto dependen de su dimensión, o sea que el espacio ocupado por una línea, circulo o esfera se puede encontrar en general como una función de la dimensión del objeto.

En este ejemplo se ve inmediatamente que existen propiedades de la naturaleza (como el espacio ocupado) que se pueden calcular mediante una ecuación en la cual uno de los parámetros es la dimensión de los objetos involucrados, ahora bien si se empiezan a observar distintas áreas de estudio, se empieza a encontrar que la dimensión de los objetos es una propiedad presente en múltiples fenómenos de la naturaleza [1][2][4][7][17], como por ejemplo en las ecuaciones que relacionan la forma de un objeto y el sonido que emite[1], sin embargo por su misma cotidianidad resulta transparente y en su momento no nos preocupamos ni de calcularla ni de usarla correctamente.

Comúnmente cuando necesitamos usar la dimensión de un objeto dentro de una ecuación la asignamos por observación (o es lineal, planar o volumétrica), con lo cual se puede llegar a asignar una dimensión errónea a los objetos, como es el caso de los aerogeles[7] o sea geles (como los flanes, gelatinas, etc.) a los cuales se les han sustituido los líquidos por aire, pero se ha mantenido su estructura, donde si los ve uno en principio son objetos en tres dimensiones, pero sin embargo sus propiedades físicas indican que en algunos casos pueden tener un comportamiento mas cercano al de un objeto en una o dos dimensiones.

Es por lo anterior que desde hace tiempo se ha considerado que es importante manejar la dimensión real de los objetos y fenómenos de la naturaleza.

2.- MÉTODOS PARA ENCONTRAR LA DIMENSIÓN FRACTAL

Ahora bien, ya que se acostumbra uno al hecho de que existen ecuaciones donde la dimensión es un parámetro es directo pasar a la idea de que este se puede despejar, con lo que se tiene una forma general para encontrar la dimensión de un objeto.

Prácticamente cualquier ecuación donde aparezca la dimensión como parámetro se podría ver como un candidato para encontrar la dimensión del objeto, por ejemplo en el caso de los aerogeles se usan modelos que permiten detectar que tan compacto (3d) o disperso (2d o 1d) es el aerogel que se esta estudiando[7].

La dimensión fractal del aerogel se obtiene sometiéndolo a algún tipo de radiación (como por ejemplo la luz) ya que, en este caso el valor de la dimensión fractal depende de la intensidad I de la radiación dispersada por el aerogel, la cual varia de acuerdo a la longitud de onda λ de la radiación elevada a la d, donde d es la dimensión fractal del aerogel, o sea que $I \alpha \lambda^d$ (*I esta relacionada con* λ^d).

El anterior es un método experimental para obtener la dimensión fractal, pero existen otros tipos de métodos, como por ejemplo los que toman el objeto y lo engloban dentro de algún cuerpo geométrico como una hiperesfera o un hipercubo[1][8][11][17], y aplican fórmulas que relacionan la cantidad total de elementos que caben en el cuerpo geométrico y la cantidad de elementos que componen al objeto.

Encontrar la cantidad de elementos que ocupan completamente un cuerpo geométrico es normalmente fácil ya que comúnmente existen ecuaciones directas para encontrarlos, sin embargo calcular el numero de elementos que componen un objeto fractal es un poco mas complicado y se ha resuelto de múltiples formas, incluyendo el contar elemento por elemento, el encontrar alguna ecuación que indique como crece el objeto fractal, o como en el caso de los objetos que se generan por agregación[4], lo que se hace es generar una gran cantidad de fractales usando alguna técnica especifica de agregación y para cada fractal se mide cuantos objetos se agregaron y cual es el radio de la esfera que lo engloba y luego se encuentra para cada agregado su dimensión y se calcula la dimensión promedio de todos los agregados con lo que se obtiene una buena aproximación a la dimensión real.

Desde finales del siglo XIX y principios del XX se contaba con métodos para encontrar dimensiones fraccionarias, aunque hasta el descubrimiento de los fractales se veían como meras curiosidades, uno de los primeros desarrollados fue el método de Hausdorff [1][4][8][11][17] que consiste básicamente en lo siguiente.

a. Dado un objeto fractal se le engloba completamente en una esfera (o hiperesfera de dimensión mayor que la dimensión del objeto) de radio **r.**
b. Se cuenta el numero de unidades elementales **N** que forman el objeto fractal.
c. Como en un espacio euclidiano en general se tiene que $\mathbf{N = c\ r^d}$ (el numero de unidades contenidas en el espacio **N** es igual a una constante por el radio **r** elevado a la dimensión del espacio **d**) y nuestro problema es encontrar **d** despejando queda:

$N/c = r^d$
$\ln(N/c) = \ln(r^d)$
$\ln(N/c) = d*\ln(r)$

$\mathbf{d} = \ln(N/c) / \ln(r)$

o sea que para encontrar la dimensión fractal de un objeto se divide ln de N por una constante entre ln de r.

El método de Hausdorff para encontrar la dimensión fractal de un objeto se usa comúnmente y aparece en muchas publicaciones sobre fractales, sin embargo se ha detectado (por ejemplo en problemas de acústica[1]) que cuando el fractal no tiene una estructura exactamente autosimilar, se encuentra solo una aproximación a la dimensión real (pero siempre una cota mínima)[17], por lo que se ha ido extendiendo el uso de otro método conocido como método de Minkowski o de Cajas [1][8][11][17], el cual se basa en la siguiente idea:

Si se toma un objeto (línea, superficie, sólido) y se recubre con pequeñas cajas de tamaño **t**, el numero de cajas necesarias para cubrir completamente el objeto sin que se superpongan cajas depende de la dimensión del objeto, por ejemplo si se tiene una línea de tamaño 10**t** se necesitan 10 líneas de tamaño **t** para recubrirla.

Si se tiene un cuadro de lado 10**t** se necesitan $10^2 = 100$ cuadros de tamaño $\mathbf{t}^2$ para recubrirla. Si se tiene un cubo de lado 10**t** se necesitan $10^3 = 1000$ cubos de tamaño $\mathbf{t}^3$ para recubrirla. En general si se tiene un hipercubo de dimensión **d** se necesitan $10^{\mathbf{d}}$ hipercubos de tamaño $\mathbf{t}^{\mathbf{d}}$ para recubrirlo.

Por otro lado para poder asegurarnos de tener un recubrimiento real es necesario hacer que el tamaño **t** sea cada vez menor y como se puede observar en la siguiente tabla conforme el tamaño **t** disminuye el numero de cajas necesarias **N** aumenta dependiendo de la dimensión **d** aunque el tamaño del objeto sea constante.

dimensión **d** / tamaño **t**	1	2	3
1	1	1	1
0.1	10	100	1000
0.01	100	10000	1000000

En general $\mathbf{N} = (1/\mathbf{t})^{\mathbf{d}}$ o sea que el numero **N** de cajas de tamaño **t** necesarias para cubrir un objeto depende de su dimensión, de donde si se despeja **d** queda que:

d= ln (N)/ ln (1/t).

Por lo que para encontrar la dimensión fractal **d** de un objeto, lo que se hace es recubrirlo totalmente de cajas de tamaño **t**, contar cuantas se necesitaron **N** y calcular los logaritmos.

Por ejemplo para calcular la dimensión fractal de los polvos de Cantor tomamos en cuenta que en cada uno de las iteraciones que se realizaron para obtener los polvos los fragmentos son cada vez mas pequeños y miden 1/3 de los fragmentos de la iteración previa como se ve en la siguiente tabla

Numero de cajas N	tamaño de las cajas t
1	1
2	1/3
4	1/9
8	1/27
"	"
2^n	$1/3^n$

El numero de cajas crece en potencias de 2 y su tamaño cambia como potencias de 1/3, de donde la dimensión fractal del objeto seria

$\mathbf{d} = \ln(2^n) / \ln(1/1/3^n) = \ln(2^n) / \ln(3^n)$
$= \ln(2) / \ln(3) = \mathbf{0.6309...}$

Al aplicar el método de Minkowski se obtiene una dimensión fractal que cumple con lo esperado y que por lo común es mayor o igual a la obtenida con el método de Hausdorff, sin embargo no es de aplicación general, ya que, la dimensión del objeto se obtiene cuando **t** tiende a cero (o sea que el lim **d** -->dimensión del objeto cuando **t** -->0) y este limite no converge cuando **d** es mayor que 2[17].

Por lo que el método de Hausdorff se sigue utilizando para propósitos prácticos y con el fin de disminuir los problemas para encontrar la dimensión fractal de objetos que no son exactamente autosimilares se maneja el concepto de autosimilaridad estadística que parte de la premisa de que si se toman suficientes ejemplos de un cierto tipo de objeto fractal (por ejemplo árboles de cierto tipo) y se calcula la dimensión para cada uno de estos, estadísticamente se puede encontrar una buena aproximación a la dimensión real.

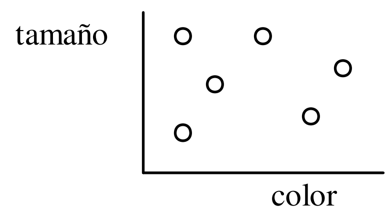
Como se ha visto existen fórmulas matemáticas y modelos (principalmente de Biología y Física) donde en forma cotidiana siempre se ha utilizado la dimensión de los objetos de estudio, aunque generalmente se han usado únicamente dimensiones enteras (tal vez pocas personas lo han notado ya que estamos acostumbrados a manejar las dimensiones 1, 2, 3, ..., n y simplemente por observación asumimos la dimensión del objeto de estudio), sin embargo desde que se descubrieron los fractales se detecto que la explicación de un fenómeno dado era mejor conforme la dimensión se acercaba a la dimensión fractal real. Por lo que en la actualidad surge el sentimiento de que si en las diferentes fórmulas y modelos que dependen de la dimensión de un objeto se utiliza su dimensión fractal, el modelo puede explicar mejor el fenómeno estudiado.

3.- EL CONTINUO DIMENSIONAL

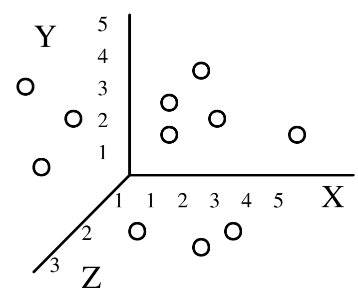
Hasta este punto se ha mostrado que existen múltiples fenómenos y objetos que se caracterizan por tener una dimensión fractal, pero para ver que significa esto en términos de una representación espacial, partiremos primero de la forma como estamos acostumbrados a visualizar los objetos en termino de coordenadas enteras para luego extrapolar a coordenadas fractales.

Para lo cual partiremos de que, si se describe un objeto en términos de un conjunto de variables independientes, cada variable corresponde a una dimensión de un espacio y el objeto se puede ver como un punto en ese espacio.

Por ejemplo si se tiene un conjunto de objetos descritos por su color y tamaño cada objeto se puede representar como un punto en un espacio de dos dimensiones



Si se tienen objetos descritos por tres variables independientes se representan como puntos en tres dimensiones.



O sea que no nos cuesta trabajo visualizar objetos como puntos en un espacio de 1, 2 o 3 dimensiones, y aun mas aceptamos que si un objeto se representa con n dimensiones entonces se puede "ver" como un punto en un espacio n-dimensional,

Ahora bien, desde el surgimiento de los fractales tenemos que aceptar que existen objetos con dimensiones fraccionarias como por ejemplo 1.37, o sea que, ya no solo existen dimensiones 1,2,..., n sino también dimensiones 2.38, 1.47, 325, etc., y aun mas para cada numero real podemos postular que existe un objeto que tiene esa dimensión.

Por ejemplo para cada $x \in (0,1)$ podemos generar un fractal de dimensión x, como se puede ver si tomamos la siguiente generalización de los polvos de Cantor propuesta por Gamma Z. Galindo Pérez [14]:

a. Tomamos una recta de tamaño T y le quitamos un segmento proporcional q, por ejemplo la tercera parte, la mitad, 2/3 o cualquier otro valor entre (0,1), del centro.

b. Tomamos cada uno de los segmentos resultantes y les quitamos nuevamente del centro el segmento proporcional q.

c. Seguimos repitiendo lo anterior, quedando finalmente una secuencia de polvos de Cantor como la siguiente:

Si medimos el tamaño de un segmento y suponemos que T = 1 tenemos que:

en la primera iteración el segmento vale 1	
en la segunda vale	$(1-q)/2$
en la tercera vale	$(1-q)^2/2^2$
en la cuarta vale	$(1-q)^3/2^3$
y en la enésima vale	$(1-q)^n/2^n$

El tamaño de los polvos de Cantor cambia en proporción al valor de **q** (o sea, el valor que indica que tanto por ciento de los segmentos se retira en cada iteración).

Ahora, si calculamos la dimensión fractal **d** de los polvos de Cantor propuestos por Gamma Z. Galindo Pérez, mediante el Método de Minkowski

se tiene que calcular
$\mathbf{d} = \ln(\mathbf{N}) / \ln(1/\mathbf{t})$.

donde

$\mathbf{N} = 2^n$

$\mathbf{t} = (1-\mathbf{q})^n / 2^n$

o sea que

$\mathbf{d} = \ln(2^n) / \ln(1/((1-\mathbf{q})^n/2^n))$

$\mathbf{d} = \ln(2^n) / \ln(2^n / (1-\mathbf{q})^n)$

$\mathbf{d} = (n \ln(2)) / (n \ln(2/(1-\mathbf{q})))$

$\boldsymbol{d} = \ln(2) / \ln(2/(1-\boldsymbol{q}))$

*De donde tenemos que la dimensión de los polvo de Cantor dependen de **q***

despejando **q** de la ecuación
$\mathbf{d} = \ln(2) / \ln(2/(1-\mathbf{q}))$

$\mathbf{d} = \ln(2) / (\ln(2) - \ln(1-\mathbf{q}))$

$(\ln(2) - \ln(1-\mathbf{q})) / \ln(2) = 1/\mathbf{d}$

$1 - \ln(1-\mathbf{q}) / \ln 2 = 1/\mathbf{d}$

$1 - 1/\mathbf{d} = \ln(1-\mathbf{q}) / \ln 2$

$(1-1/\mathbf{d}) \ln 2 = \ln(1-\mathbf{q})$

$\ln 2^{(1-1/\mathbf{d})} = \ln(1-\mathbf{q})$

$2^{(1-1/\mathbf{d})} = 1-\mathbf{q}$

queda

$\boldsymbol{q} = 1-2^{(1-1/\boldsymbol{d})}$

Entonces *para cualquier dimensión candidata **d** ε (0,1) podemos encontrar un **q** que genera polvos de Cantor con esa dimensión **d**.*

*Con lo que mostramos que para cualquier valor **d** entre (0,1) existe un objeto que tiene esa dimensión.*

Y como el intervalo (0,1) tiene un numero continuo de valores entonces existe un continuo de dimensiones.

De donde, postulamos que *vivimos en un continuo dimensional,* o sea que no tenemos un universo de 3, 4,... n dimensiones, sino *un universo en el cual se tiene un numero transfinito de dimensiones* y lo mismo podemos tener objetos de dimensión 1, 2, 3,..., n dimensiones o de dimensión 3/4, 2/3, 8/3, π o x dimensión donde x es un numero real.

Esta concepción del continuo dimensional tiene sus antecedentes en el desarrollo de la recta numérica, en el cual primero se manejan los números naturales, luego los enteros, luego los racionales y posteriormente los reales, con lo que se tiene una recta continua; exactamente lo mismo se plantea para el caso de nuestra concepción del universo, ya que originalmente se manejan problemas en una dimensión, dos dimensiones,..., n dimensiones y mas adelante en dimensiones fraccionarias racionales y en dimensiones reales.

CONCLUSIÓN

Esta idea nos permite cuestionar y replantear todos aquellos modelos en los que interviene como un parámetro la dimensión de algún objeto, por lo que en general sentimos que es necesario revisar nuestro modelo físico de la realidad, ya que esta basado en una concepción del universo formado por un numero natural de dimensiones (aunque tal vez infinito pero no fractal o continuo dimensional) y finalmente permite plantear la pregunta crucial *¿que teoría del universo se puede desarrollar partiendo del concepto de Continuo Dimensional?*, tal vez, *el modelo físico-biológico-informático del universo esta por descubrirse*.

FUENTES DE INFORMACIÓN.

1. Jean-Pierre **Fabre**, *¿Se puede oír la forma de un tambor?*, en Mundo Científico Vol. 8, num. 85, Pág. 1047, Ed. Fontalba, S.A., Barcelona, España.
2. James **E. Mcnamee**, *Los fractales en los vasos pulmonares,* en Mundo Científico vol. 12, num. 122, Pág. 248, Ed. Fontalba, S.A., Barcelona, España.
3. Edmundo **Flores**, *La creación de la nueva ciencia del caos y el ocaso de la Meteorología y de la Econometrìa*. en El Búho tomo IV, num. 26687, domingo 15 de Julio de 1990.
4. Rémi **Jullien**, Robert **Botet** y Max **Kolb**, *Los Agregados*, en Mundo Científico Vol. 6, num. 54, Pág. 36, Ed. Fontalba, S.A., Barcelona, España.
5. Robert **Botet,** Rémi **Jullien** y Arne **T. Skjeltorp**, *La forma, resultado del crecimientos*, en Mundo Científico vol. 7, num. 75, Pág. 1244, Ed. Fontalba, S.A., Barcelona, España.
6. Leonard **M. Sander**, *Crecimiento Fractal*, en Investigación y Ciencia, num. 126, Pág. 66, marzo de 1987.
7. René **Vacher**, Eric **Courlens** y Jacques **Pelous**, *La estructura fractal de los aerogeles*, en Mundo Científico vol. 10, num. 103, Pág. 652, Ed. Fontalba, S.A., Barcelona, España.
8. Donald **Hearn** y M. Pauline **Baker**, *Gráficas por Computadora 2.- Ed.*, Editorial Prentice Hall, 1995, México.
9. Michael **Barnsley**, *Fractals Everywhere*, Ed. Academic Press, Inc., 1988, Londres.
10. Fernando **Galindo Soria**, *El Continuo Dimensional: Un Universo Fractal,* Conferencia en el Congreso Nacional de Egresados de Física y Matemáticas, 1989, La Trinidad Tlaxcala.
11. Heinz-Otto **Peitgen** and Dietmar **Saupe** (Editores). *The Science of Fractal Images.* Ed. Springer-Verlag, 1988.
12. Fernando **Galindo Soria.** *Aplicaciones de la Lingüística Matemática y los Fractales a la Generación de Imágenes.* en Memorias del Simposium Nacional de Computación. México, Nov. de 1991.
13. Fernando **Galindo Soria**, *Aplicación de la Lingüística Matemática a la Generación de Paisajes*, en Memorias del Simposium Internacional de Computación, IPN-CENAC, México 1996.
14. Gamma Z. **Galindo Pérez,** *Comunicación personal sobre la posibilidad de tener polvos de Cantor de diferentes dimensiones,*. 5 de Agosto de 1998. Cd, de México.
15. Antonio **Jiménez Aviña**, *Comunicación personal,*. 6 de Agosto de 1998. Cd, de México.
16. Fernando **Galindo Soria.** *De Fractales y otros Bichos: La Matemática de la Naturaleza (Rumbo a la Matemática Informática),*. en Memorias del VI Congreso Nacional sobre Informática y Computación, Octubre de 1993, Mérida, Yucatán.
17. Monique **Dubois**, Pierre **Aften** y Pierre **Bergé**, *El Orden Caótico*, en Mundo Científico vol. 7, num. 68, Pág. 429, Ed. Fontalba, S.A., Barcelona, España.
18. Martin **Gardner**, *White and brown music, fractal curves, and one-over-f noise*, en Scientific American, abril de 1978.