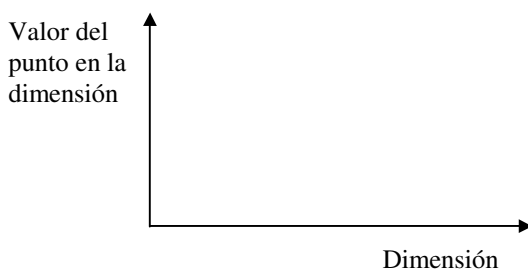


IV.2 TRANSFORMACIÓN AL ESPACIO DIMENSIÓN-VALOR

*Fernando Galindo Soria**

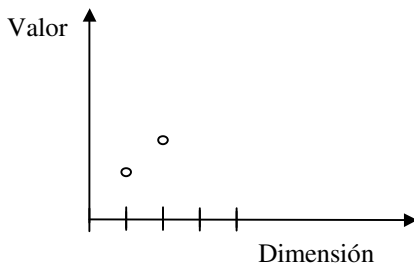
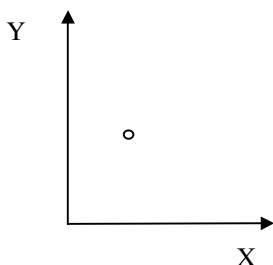
I LA GRÁFICA DE UN PUNTO EN UN NÚMERO CONTINUO DE DIMENSIONES

La gráfica de un punto en un numero continuo de dimensiones es una línea en el espacio (dimensión, valor)



Ejemplos de explicación

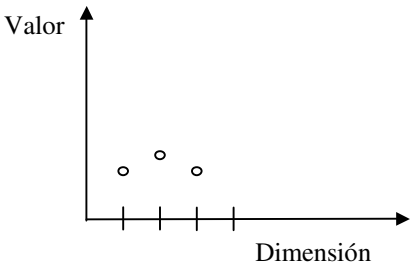
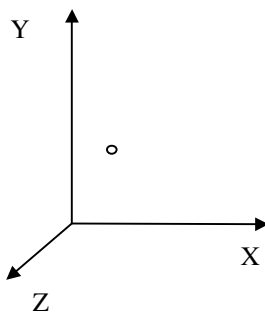
a) Punto en dos dimensiones X Y
 3 5



* Fernando Galindo Soria escribió este trabajo el 20 de Abril de 1995 cuando estaba en la Escuela Superior de Computo (ESCOM) del IPN.

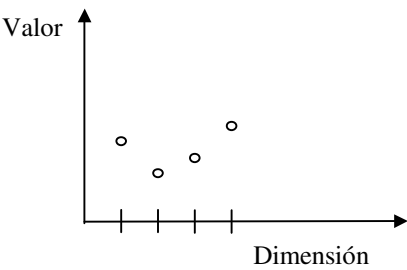
b) Punto en tres dimensiones

X	Y	Z
3	4	3



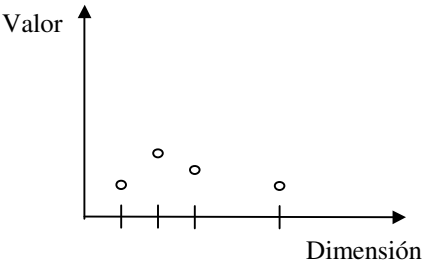
c) Punto en cuatro dimensiones X Y Z K

5	3	4	6
---	---	---	---



d) Punto en n dimensiones d1 d2 d3 ... dn

2	4	3	...	2
---	---	---	-----	---



Se esta realizando una transformación del espacio de n dimensiones (o en su caso de un número continuo de dimensiones a el espacio (dimensión, valor)).

En la transformación del espacio de n dimensiones y el espacio (dimensión, valor) un punto se ve como n puntos en el espacio (dimensión, valor)

Cambio del espacio de n dimensiones al espacio $\langle \text{dimensión, valor} \rangle$

$$\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle \rightarrow \langle d, v \rangle$$

Un punto con un numero continuo de dimensiones en un espacio $\langle \text{dimensión, valor} \rangle$ se puede ver como un conjunto transfinito de puntos, segmentos de recta o en el mejor de los casos una recta (pero al final es una curva, no necesariamente continua).

Se podrían reordenar las dimensiones para formar grandes segmentos. Idea: Se ordenan los valores de menor a mayor y se reordenan las dimensiones

Se obtiene una recta o un conjunto de segmentos de recta (en un continuo de dimensiones) alineados con cierta pendiente

En general un punto en el espacio $\langle \text{dimensión, valor} \rangle$ se puede ver como una curva formada por múltiples segmentos de curva y en el mejor de los casos como una curva continua.

II REPRESENTACIÓN DE UN PUNTO EN N DIMENSIONES

Viéndolo al revés

Una recta formada por n puntos se puede ver como un punto en n dimensiones (lo mismo para línea continua $\Rightarrow$ punto en un continuo dimensional)

- m rectas son n puntos pero la línea de n puntos se puede ver como un punto en un espacio de $n \times m$ dimensiones.

- un continuo de rectas forman una área
 - el área esta formada por m rectas (donde $m \rightarrow \aleph_c$),
 - volumen S área $S = \text{Punto}$
 - en espacio $\langle d_1, d_2, d_3, \dots, d_n \rangle$
 - La curva que representa una señal (de sonido, luz, presión, temperatura, electrocardiograma, etc), se puede ver como un punto en un continuo de dimensiones
 - O sea que una imagen, sonido, etc. lo puedo representar como un punto en un continuo de dimensiones y cuando se digitaliza lo que se obtiene es una representación como un punto en n dimensiones.
 - En el proceso de digitalización conforme aumenta la cantidad de dimensiones tiende a representar cada vez mejor al objeto real.
 - Si un objeto lo represento como un punto en una dimensión
 - Si tengo varios objetos y cada objeto se representa como un punto en una dimensión, en su momento varios objetos podrían tomar el mismo valor y caer en el mismo lugar.
- Por ejemplo si quiero representar a los alumnos de un grupo por su calificación y suponemos una distribución uniforme de las calificaciones entre 0 y 10 y puros valores enteros entonces x pertenece a $[0, 10]$ puede tomar 11 posibles valores
- Si tengo un alumno puede tomar cualquier valor entre 0 y 10
 - Si tengo dos alumnos cada uno puede tomar un valor entre 0 y 10 y la probabilidad de que colisiones es de $2/11$
- A la relación que existe entre el numero de valores posibles $[0, 10]$ y el numero de objetos (alumnos) en este caso 2, se le conoce como densidad y en general
- Si $[a, b]$ es el numero de valores posibles entonces
- $|b-a| + 1$ (la distancia entre a y b) nos da el rango de valores y se denota por μ

$$\mu = |b - a| + 1$$

en el ejemplo de las calificaciones

$$\mu = |10 - 0| + 1 = 11$$

la variable probabilística puede tomar 11 posibles valores

Por otro lado al número de objetos se les denota por λ

En el ejemplo anterior $\lambda = 2$

la densidad se define como $\rho = \lambda / \mu$

En el ejemplo $\rho = 2 / 11$

La densidad entre otras cosas me indica que tan factible es que dos objetos colisionen (o sea que tomen el mismo valor)

Por ejemplo si $\mu = 11$ y tengo

- 1 persona $\rho = 1 / 11$

- 2 personas $\rho = 2 / 11$

Si tengo 10 personas, entonces $\rho = 10 / 11$ y es muy posible que dos personas tomen el mismo valor

si tengo 20 personas, es seguro que varias personas tomen el mismo valor

Por lo que si quiero distinguir entre varios objetos midiendo 1 sola variable (suponiendo distribución uniforme) se necesita que $\rho \ll 1$ o sea que el número de objetos sea menor que el número de valores posibles

Para el ejemplo de las personas la calificación no es una buena variable ya que en general en un grupo se tienen más de 10 alumnos y además la distribución no es uniforme.

-Otra variable mejor podría ser la altura en centímetros (nuevamente supondremos el caso ideal de distribución uniforme suponiendo que la probabilidad de tomar cualquier valor es la misma)

Si el rango de altura es

[1.50, 1.70] cm.

$$\mu = |169 - 150| + 1 = 20$$

si tengo pocos alumnos funciona pero ya para mas de 15 truena

En general la curva de rho es una curva con un punto de inflexión en .75, antes de .75 la curva crece lento y después crece muy rápido

Por lo que en general si

$\rho < .75$ los datos colicionan poco.

Por lo que si tengo menos de 15 alumnos la variable altura es fiable para discriminar.

Ahora bien un fenómeno muy hermoso surge si utilizo las dos variables combinadas (dos dimensiones) ya que si las variables no están correlacionadas el espacio probabilistico se multiplica o sea que si categorizo a un conjunto de objetos mediante 2 variables independientes entonces si μ es el numero de puntos en x, y μ_2 es el numero de puntos en y entonces $\mu_1 \mu_2$ es el numero de puntos en el espacio probabilistico

Por ejemplo en el caso de los alumnos

$$\mu.\text{calificación} = 11$$

$$\mu.\text{tamaño} = 20$$

$$\mu.\text{espacio} = \mu.\text{calificación} * \mu.\text{tamaño} = 11 * 20 = 240$$

Con lo que las colisiones se reducen drásticamente ya que aun con un grupo de 50 alumnos

$$50 < 240 * .75 = 165$$

Si se tienen 3 o 4 o mas variables rápidamente se llega a espacios probabilísticos con una cantidad enorme de posibles valores, por lo que si tengo objetos caracterizados por 1000 variables la posibilidad de que 2 objetos diferentes tomen el mismo valor es muy pequeña.

Ahora bien recordando el inicio del trabajo una señal u objeto lo puedo ver como un punto en n dimensiones (al digitalizar cada valor digitalizado corresponde al valor de una dimensión) por lo que una imagen de 600×500 pixels corresponde a un punto en un espacio de 300000 (trescientos mil) dimensiones

La posibilidad de que dos objetos diferentes colisiones puede llegar a ser despreciable y si aumentamos el color como otra variable tendríamos un punto en $600 \times 500 \times 256$ (suponiendo 256 colores)

Podemos discriminar sin problemas alrededor de 50 millones de objetos

Ahora bien si dejamos de suponer una distribución uniforme y suponemos una distribución normal se tiene que el comportamiento del espacio probabilístico para una variable es de forma normal.

Si tenemos dos variables se tiene un espacio donde se interceptan dos curvas normales

El espacio con centro en $(x.\text{media}, y.\text{media})$ y que tiene como radios la varianza de x y la varianza de y se conoce como elipse de Chebichev

Conforme aumenta la cantidad de variables se termina teniendo una hiperelipse de Chebichev de n dimensiones con la característica de que todos los puntos de la hiperelipse se pueden ver como casos particulares de un mismo objeto representado por el punto medio $(d_1, d_2, d_3, \dots, d_n)$ de la elipse.

O sea que todos los puntos “cercanos” a $(d_1, d_2, d_3, \dots, d_n)$ se pueden considerar como ejemplos del mismo objeto

De donde una técnica para reconocer un objeto o fenómeno o patrón de algún tipo consiste en encontrar su representación “promedio” en un espacio de n dimensiones y todos los objetos cercanos (que caen dentro de la elipse de Chebichev) se pueden considerar como el mismo objeto

Este enfoque tiene una aplicación inmediata en el caso del reconocimiento de imágenes ya que si por ejemplo se quiere distinguir entre varias imágenes (supondremos blanco y negro por facilidad) cada imagen es un punto en un espacio de 300000 puntos

La implementación computacional se vuelve trivial ya que lo único que se necesita es un mecanismo que obtenga las imágenes promedio pero eso es trivial ya que si cada imagen la almaceno como un vector de n entradas y simplemente voy sumando casos particulares de cada imagen pixel a pixel y llevando un contador al final el promedio es directo.

Entre mas puntos se tengan mas rápidamente se discrimina y la convergencia es mas rápida ya que con una muestra significativa (aproximadamente 90 casos) se tiene una buena representación.

Si esto se integra en un sistema evolutivo la convergencia es en tiempo real.